ENAC 1980 ELEVES PILOTES DE LIGNE

4h (COEFF 7) [Rédiger quatre exercices sur cinq).

PROBLEME I

α et β étant des complexes, on considère la matrice A :

$$A = \begin{vmatrix} \alpha & -\beta & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \beta & \alpha & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \alpha & \beta \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\beta & \alpha \end{vmatrix}$$

1) Déterminer la relation (1) devant lier α et β pour que :

$${}^tA.A = I$$

${}^tA$ désignant la transposée de A et I la matrice

$$I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Cette relation (1) sera supposée vérifiée dans la suite du problème.

2) On considère la matrice B

$$B = \begin{vmatrix} 0 & -\beta & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \beta & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \beta \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\beta & 0 \end{vmatrix}$$

B^2 étant le carré de B montrer que :

$$B^2 = (\alpha^2 - 1)\, I$$

3) A^n désignant la puissance n de A montrer que :

$$A^n = P(\alpha)\, I + Q(\alpha)\, B$$

où $P(\alpha)$ et $Q(\alpha)$ sont des polynômes que l'on explicitera.

Montrer que $P(\alpha)$ et $Q(\alpha)$ vérifient la relation :

$$P^2(\alpha) + (1 - \alpha^2)\, Q^2(\alpha) = 1$$

où $P^2(\alpha)$ et $Q^2(\alpha)$ désignent respectivement les carrés de $P(\alpha)$ et de $Q(\alpha)$.

Exprimer $P(\frac{1}{2})$ et $Q(\frac{1}{2})$ à l'aide des fonctions circulaires de multiples de $\frac{\pi}{3}$.

4) Calculer en fonction de α les nombres complexes λ qui annulent le déterminant de la matrice $[A - \lambda I]^2$ et déterminer, pour ces valeurs de λ, le rang de la matrice $A - \lambda I$.

.../...

PROBLEME II

n étant un entier positif, on considère la fonction

$$Q_n : \theta \to Q_n(\theta) = \frac{\sin (n+1)\,\theta}{\sin \theta}$$

où $\theta \in [0, \pi]$ et on pose : $x = \cos \theta$, $\theta = \text{Arc cos } x$

1) Démontrer que $P_n(x) = Q_n(\text{Arc cos } x)$ est un polynôme en x dont on déterminera le degré et la parité en fonction de n . (On ne demande pas ici d'expliciter le polynôme $P_n(x)$).

2) Déterminer les valeurs de $P_n(1)$, $P_n(-1)$, $P_n(o)$ et de $P'_n(o)$, P'_n désignant la dérivée première de P_n.

Démontrer que $P_n(x) \leq n+1$ pour tout $x \in [-1, +1]$.

Etablir que les polynômes P_n vérifient la relation :

$$P_{n+1}(x) + P_{n-1}(x) = 2x\, P_n(x)$$

3) Sachant que pour tout x réel le polynôme $P_n(x)$ vérifie l'équation différentielle

$$(E_1) : \quad (1 - x^2)\, y'' - 3x\, y' + n\,(n+2)\, y = 0$$

Etablir une relation entre deux coefficients successifs non nuls quelconques de $P_n(x)$.

Expliciter alors pour $n = 2p$ et $n = 2p+1$, les coefficients de $P_n(x)$.

PROBLEME III

1) On donne l'équation

$$2 \sin \theta\, (1 - \cos \theta) - 1 = 0$$

Montrer qu'elle a deux racines comprises entre 0 et π et placer ces deux racines par rapport aux nombres

$$0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi .$$

2) Dans un repère orthonormé $O, \vec{i}, \vec{j}$, d'axes Ox, Oy, on donne le cercle (C) tangent en O à Oy et dont le centre C a pour abscisse a, $(a > o)$. Soit P le point du cercle (C) défini par l'angle $(Ox, CP) = \theta$ avec $0 \leq \theta \leq \pi$. La tangente en P à (C) coupe Oy en T. Sur cette tangente on place le point M en portant, à partir de T vers P, une longueur $TM = 2a$.

a) Montrer que les coordonnées x et y du point M s'expriment en fonction de θ par

$$\begin{cases} x = 2a \sin \theta \\ y = a \dfrac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} - 2a \cos \theta \end{cases}$$

b) Construire, quand θ varie de 0 à π , la courbe (Γ) décrite par le point M.

c) La courbe présente un point double dont on déterminera les coordonnées. Montrer que (Γ) est tangente à (C) en un point que l'on déterminera.

d) Calculer l'aire limitée par la boucle que décrit (Γ).

PROBLEME IV

On donne l'équation différentielle

$$(E) \; : \; (x^2 + 1)\, y' - 2m\, xy = 1$$

dans laquelle m désigne un réel quelconque.

1) Posant $I_p = \int_0^x \frac{dt}{(t^2+1)^p}$, montrer que la solution générale de (E) peut s'écrire :

$$y = (x^2+1)^m \left[I_{m+1} + C \right],$$

C étant une constante arbitraire.

2) Posant $\phi = \text{Arc tg } x$, déterminer une nouvelle expression de la solution générale de (E).

Exprimer en fonction de x la solution générale de (E) pour $m = \frac{1}{2}$ et $m = -\frac{1}{2}$.

3) On désigne par Y celle des solutions de (E) qui s'annule pour $x = 0$; dans un repère orthonormé $(O, \vec{I}, \vec{J})$ d'axes Ox, Oy, tracer son graphe dans le cas où $m = -\frac{1}{2}$.

4) Représenter l'ensemble des graphes des solutions de (E) pour $m = \frac{3}{2}$.

PROBLEME V

On considère l'intégrale

$$I_n = \int_0^\pi \frac{dx}{(1 + \lambda \cos x)^n}$$

n étant un entier strictement positif et λ un nombre réel quelconque tel que $|\lambda| \neq 1$.

1) Démontrer la relation de récurrence

$$n(\lambda^2 - 1)\, I_{n+1} + (2n-1)\, I_n - (n-1)\, I_{n-1} = 0$$

2) Calculer I_0, I_1, I_2, I_3.

3) On considère maintenant les intégrales

$$J_n^m = \int_0^\pi \frac{\cos^m x\, dx}{(1 + \lambda \cos x)^n}$$

m désignant un entier positif au plus égal à n.

Montrer que J_n^m est donnée par la formule

$$\lambda^n J_n^m = I_{n-m} - C_m^1 I_{n-m-1} + \ldots + (-1)^p C_m^p I_{n-m+p} + \ldots + (-1)^m I_n$$

où C_m^p désigne le nombre de combinaisons de p objets choisis parmi m.

En déduire que toute intégrale de la forme

$$\int_0^\pi \frac{P(\cos x)\, dx}{(1 + \lambda \cos x)^n} \quad \text{où } P(\cos x) \text{ désigne un polynôme en } \cos x$$

de degré au plus égal à n, s'exprime en fonction de I_1.

Appliquer ce résultat pour calculer l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{2 - \cos x}{2 + \cos x} \right)^2 dx$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail